MASTER EN SCIENCES ÉCONOMIQUES

Programmation multirégionale

De Ridder, Luc

Award date:
1968

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX (NAMUR)

Facultés des Sciences Economiques et Sociales

Année Académique 1967-1968

Programmation Multirégionale

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Licencié en Sciences Economiques et Sociales (Analyse économique)

Jury du Mémoire : J. PAELINCK
L. DERWA

Luc de RIDDER

AVANT - PROPOS

Qu'il nous soit permis de remercier Monsieur Derwa, pour l'attention qu'il a bien voulu nous consacrer, les conseils qu'il nous a donnés;

Monsieur Paelinck qui, tout au long de cette année, nous a suivi, encouragé et permis de conduire à son terme ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

I n t r o d u c t i o n

En choisissant la programmation multirégionale comme sujet de mémoire, nous souhaitons poursuivre deux buts.

Nous désirons tout d'abord parvenir à une synthèse de la théorie de cette programmation, synthèse basée sur les différents modèles existant dans la littérature économique.

Nous verrons ainsi les diverses manières dont les auteurs envisagent les liaisons interrégionales, les différents objectifs qu'ils choisissent, les contraintes qu'ils retiennent.

Après avoir de la sorte examiné les diverses composantes des modèles théoriques, nous tâcherons, dans une seconde partie, de vérifier dans quelle mesure existe, en Belgique, la matière première statistique correspondant à un ou plusieurs de ces modèles; cette investigation est une étape indispensable dans la construction ultérieure d'un modèle de programmation multirégionale.

Notre mémoire comportera donc deux chapitres principaux:

Chapitre I : Essai de synthèse
Chapitre II : Recherche empirique

En conclusion, nous indiquerons comment nous voyons la construction possible d'un modèle d'optimisation.

Chapitre I

ESSAI DE SYNTHESE

La programmation linéaire étant quasiment la méthode encore la plus fréquemment employée pour arriver à résoudre les modèles d'optimisation, nous avons, en nous basant sur celle-ci, divisé cet essai en deux sections: l'une est consacrée au primal, l'autre au dual.

Ayant ainsi, dans une première partie, organisé notre synthèse, nous tâcherons, dans une seconde, de l'illustrer par deux ou trois modèles choisis parmi ceux qui nous auront paru les plus caractéristiques et les plus intéressants.

Partie I : Eléments des modèles d'optimisation

Toute programmation demande une décomposition : celle de l'économie en un certain nombre de "secteurs".

Il en est de même pour la programmation multirégionale qui - le mot multirégional nous l'indique - suppose une décomposition en terme de régions.

Nous obtiendrons ainsi, comme résultat, en tenant compte des diversités régionales, des prédispositions naturelles ou artificielles, une allocation géographique efficiente des activités que nous distinguons dans le modèle.

Plusieurs critères peuvent nous guider dans une double décomposition : par activité et par région. Nous reprendrons ceux donnés par Tinbergen et Mennes. (1)

Les activités et les régions doivent être aussi homogènes que possible; en particulier, leurs dimensions doivent être

(1) Stencil.

assez semblables.

Pour des raisons à la fois d'information et de mise en oeuvre du plan, les frontières de chaque région et de chaque secteur devraient cependant coïncider avec des limites de région administrative et des secteurs définis par la statistique officielle.

Enfin, il serait souhaitable que les frontières régionales coïncident avec les principaux obstacles aux transports, obstacles pouvant être très importants pour certains pays.

Une fois ce travail accompli, l'économiste peut s'attacher à la programmation proprement dite.

Un premier choix s'offre à lui: il peut, dans la recherche d'un optimum, utiliser un modèle primal ou un modèle dual. Ces deux modèles, le primal comme le dual, sont composés de trois éléments (1) que nous examinerons successivement et que, suivant la terminologie employée par Fox, Sengupta, Thorbecke, nous appellerons :

a) la fonction de préférence,
b) le modèle (stricto sensu),
c) les contraintes.

Pour chacun de ces éléments, nous tâcherons - dans la mesure du possible - de considérer plus ou moins explicitement deux points :

- l'interprétation à donner aux différentes composantes de ces éléments;
- les problèmes particuliers associés à chacun.

---

(1) FOX, SENGUPTA, THORBECKE, [21], The theory of quantitative economic policy with application to economic growth and stabilisation, North Holland.

Section I : L e p r i m a l

§ I.- La fonction de préférence ($c'x$ à maximer ou à minimer)

Pour arriver à un optimum, l'économiste a besoin d'un critère qui lui permette de juger les différentes solutions qui se présentent à lui. Ce critère, la fonction de préférence le lui fournit.

a) Interprétation :

Cette fonction se compose de deux vecteurs, les éléments de l'un étant fixes (c), tandis que ceux de l'autre (x) sont variables et devront être choisis de façon à donner à la fonction de préférence une valeur optimale.

Chaque élément ${}_{i}x_{j}$ du vecteur x représentera le niveau de production de l'activité j dans la région i, quelle que soit la fonction choisie.

Par contre, l'interprétation à donner au vecteur c dépendra du genre de fonction-critère retenu : fonction à maximer ou fonction à minimer.

- Fonction à maximer : chaque ${}_{i}c_{j}$ représentera la contribution de l'activité j de la région i fonctionnant au niveau unitaire à la maximation de la fonction de préférence. Ce sera souvent un élément monétaire tel que valeur ajoutée, revenu ou tout autre indicateur d'efficience des activités régionales.

- Fonction à minimer : dans ce cas, les ${}_{i}c_{j}$ seront un élément de coût: soit un coût de matières premières, soit un coût de transport, soit encore la totalité de ces deux coûts.

b) Problèmes :

Le but de toute programmation, et donc de la programmation multirégionale, lorsque l'on se situe à un niveau assez général est, pour une nation prise dans son ensemble, d'apporter un supplément de bien-être, une amélioration de sa situation économique.

Les modèles de programmation linéaire sont un des moyens à la disposition de l'économiste pour calculer pareil résultat.

La solution optimale qu'il retiendra sera bien sûr, en premier lieu, fonction du critère choisi pour juger de cette optimalité, de la capacité du ou des critères retenus à mesurer le plus complètement possible, le welfare que l'économie du pays entraîne.

Or, nous constatons que les fonctions que l'on nous propose dans les modèles théoriques ne comportent, pour juger de la valeur d'une solution, qu'un seul critère, généralement la maximation d'un revenu, de la valeur ajoutée, ou la minimation d'un coût.

Cette unicité peut, a priori, ne pas nous paraître satisfaisante et cela pour deux raisons.

Il n'est guère probable que l'on puisse, à l'aide d'un seul indice, mesurer les divers aspects d'une économie, ne fussent que les plus importants.

Même si nous faisons l'hypothèse plausible que certains critères peuvent s'adapter parfaitement à la mesure d'un aspect particulier de la vie économique, aspect qui peut constituer l'unique problème, sinon le problème le plus important, d'une région, il n'en reste pas moins que nous nous trouvons face à une pluralité de régions. Cette pluralité devant normalement supposer une diversité, nous devons conclure que les problèmes crùciaux pour chaque région ont de grandes chances d'être différents.

Ainsi, nous pouvons imaginer une fonction comportant deux critères, l'un mesurant dans la région A la valeur ajoutée, l'autre dans la région B le nombre d'emplois.

Nous aurions, dans cette hypothèse, la fonction suivante :

$$\left[\begin{array}{|c|c|}\hline A_c j & \\ \hline & B_t j \\ \hline\end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{|c|c|}\hline A_x j & \\ \hline & B_z j \\ \hline\end{array}\right]$$

$A_c j$ = V.A. donnée par activité j de la région A fonctionnant au niveau unitaire.

$B_t j$ = nombre d'ouvriers, d'employés nécessaires pour produire une unité de j dans la région B.

$A_x j$ = taux d'activité de j dans la région A.

$B_z j$ = taux d'activité de j dans la région B.

Or, comme nous l'avons déjà écrit, les fonctions de préférence ne comportent généralement qu'un seul critère. Nous voyons personnellement deux raisons à cet état de choses :

1º) Il existe une limitation tenant à la méthode même de la programmation linéaire (1) : la fonction critère doit être un scalaire, c'est-à-dire que chaque variable la composant doit pouvoir être exprimée en un dénominateur commun qui sera le plus souvent la monnaie.

Ainsi donc, nous ne pourrions à la fois maximer la V.A. et le nombre d'emplois engendrés par les divers secteurs de l'économie.

Il n'en reste pas moins que des fonctions plus complexes pourraient être élaborées, elles rencontreraient alors le souhait exprimé par Ch. Leven (2) d'avoir un concept de but qui rendrait suffisamment bien compte d'une politique de développement et de croissance.

---

(1) [21], cfr. supra.
(2) T. FRIEDMANN et W. ALONSO, [25] Regional development and planning, ch. 29. Ch. L. LEVEN, Establishing goals for regional economic development, M.I.T. Press 1964.

C'est après avoir critiqué cet aspect de la fonction de maximum de valeur ajoutée que Ch. Leven va, dans son article, proposer une fonction à trois composantes.

Sa critique de la fonction de valeur ajoutée n'est cependant pas satisfaisante. En effet, elle porte sur la fonction de maximum d'emplois qui est souvent, écrit-il, tenue par l'économiste comme une fonction de préférence identique à celle du maximum de valeur ajoutée.

Il distingue, dans son argumentation, deux cas :
- celui où des mouvements de population peuvent se produire et
- celui où de tels mouvements ne sont pas possibles.

Dans ces deux cas, nous aurons le risque d'atteindre le maximum de la fonction par la création d'emplois à basse productivité ou par la diminution de la stabilité professionnelle. De plus, ajoute Leven, il peut exister de nombreux autres objectifs tels que: la maximation de salaires individuels, de la croissance du revenu, ...

Mais, parmi tous les objectifs possibles, Leven ne choisit pas, car il ne trouve pas un critère qui serait meilleur.

Devant cette pluralité d'objectifs possibles, nous ne disposons que de l'expérience ou de l'avis du décideur politique pour choisir le critère qui nous semble le meilleur.

Différents plans sont donc possibles, suivant la fonction que nous adoptons et, pour pouvoir juger de la valeur de ces divers plans, il nous faut avoir présents à l'esprit les critères de décision et leur pondération.

<u>Toute fonction-objectif nous donnera donc des résultats différents, mais nous permettra cependant d'opérer un choix, optimal en fonction du critère retenu.</u>

Dans le cas où des mouvements de population sont possibles, la V.A. peut fuir la région par l'intermédiaire des frontaliers et le coût des services publics peut s'élever rapidement.

Après cette critique, Leven propose un modèle à trois objectifs, à savoir :

- le niveau de V.A.,
- son taux de croissance,
- sa stabilité,

chacun des critères étant pondéré par un coefficient, reflet de son influence sur le welfare. Cette nouvelle fonction ne constituera une amélioration que si les impacts de ces trois objectifs sur le welfare sont indépendants et additifs.

Cette hypothèse, Ch. Leven l'accepte et pense ainsi avoir trouvé un modèle meilleur puisque englobant plus complètement les divers aspects d'une politique de croissance. Il faut cependant que nous fassions remarquer que, pour arriver dans le cadre d'un plan au niveau de V.A. maximum, il semble logique que nous devions avoir le taux de croissance le plus élevé et une stabilité assez grande. Les impacts ne paraissent donc en général n'être ni indépendants, ni additifs.

2º) Nous touchons ici, pensons-nous, à la seconde raison pouvant expliquer la simplicité des objectifs d'une programmation : la difficulté de trouver des objectifs dont les effets soient indépendants et additifs, c'est-à-dire des indices qui ne mesurent pas la même chose.

Etant donné qu'un critère unique ne nous apporte déjà pas un jugement absolu, quel avantage y aurait-il à adopter une fonction à critère multiple qui ne serait probablement pas supérieure?

Nous terminerons ce paragraphe par une dernière remarque : quelle que soit la fonction que nous aurons retenue, la solution du problème primal nous donnera une allocation optimale de la production mais laissera dans l'ombre un autre aspect important d'une politique économique, l'allocation de la consommation.

C'est pour remédier à cette déficience que certains auteurs introduisent, à côté des contraintes habituelles, des contraintes de consommation minimale, contraintes qui nous assurent que la consommation devra se situer dans certaines limites, ce qui dans certains cas peut diminuer la valeur de la fonction-objectif.

§ II.- Le modèle

Nous pouvons, comme Stevens [9] et Parinello [17], considérer deux modèles extrêmes de programmation multirégionale.

1) Les modèles d'équilibre général spatial, basés sur le système de Walras, mais modifiés de façon à pouvoir introduire les éléments spatiaux (coûts de transport ...).

2) Les modèles input-output statiques de Léontief, basés sur des coefficients fixes.

Ce genre de modèles sera complètement déterminé une fois ajoutées des informations sur les variables exogènes.

Il n'y aura, par exemple, donc plus d'optimation dès que la quantité de facteurs disponibles sera connue.

Mais, par transformation de la matrice A des coefficients techniques en une matrice de programmation linéaire, le modèle devient un modèle d'activité (I).

---

[9] Stevens B.H., An interregional linear programming model, in "Journal of regional science", Vol. I, nº 1, 1958.

[17] Parinello S., L'ottimizzazione della produzione e degli scambi in un sistema pluriregionale: un approccio dinamico in "Economia internazionale", Nov. 1965.

(1) [3] L. Fahri, La programmation interrégionale de l'agriculture, in Cahiers de l'ISEA, série L, nº 142, oct. 1963.

[13] E.O. Heady et A.C. Egbert, Programming models of interdependance among Agricultural sectors and spatial allocation ofcrop production in "Journal of regional science", vol.4,nº 21962.

[11] Miller, Alternative optima, Degeneracy and inputed values in linear programming, in "Journal of regional science", vol. 5, nº 1, 1963

[14] A.P. Hurther, Regional investment and interregional programming, in "Papsra", vol. XIII, 1964.

L'économie y est subdivisée en un certain nombre d'activités et la solution optimale nous donne les taux auxquels celles-ci doivent fonctionner pour assurer la valeur maximale de la fonction de préférence.

Ce modèle de programmation linéaire se trouve situé entre les deux modèles extrêmes que nous avons distingués. Notons que le modèle A simplifié pourrait également être programmé (1). Comme les modèles d'équilibre général, la programmation linéaire admet des substitutions entre les différents types de production et choisit donc un optimum.

Comme les modèles de Léontief, elle est basée sur des fonctions linéaires homogènes à coefficients constants. Une solution mathématique est donc possible.

Nous verrons plus loin les déficiences qu'entraînent les fonctions linéaires homogènes.

Les modèles de P.L., tout comme les modèles input-output, ne déterminent pas la meilleure localisation de la production à l'intérieur d'une région.

Mais, à la différence du modèle "walrassien" complet, ils déterminent la localisation entre les régions, des activités, par un processus d'optimisation qui peut tenir compte des productivités régionales et des coûts de transport.

Nous pouvons enfin faire remarquer que, pour la plupart, les modèles examinés sont des modèles statiques. Ils visent à rendre optimal un état donné du système économique.

Il en va ainsi pour Bernard [1] qui veut répartir un montant donné d'investissement pour un certain état du système économique, pour Gosh [24] qui rend optimale la localisation de l'in-

---

(1) Modèle de Bernard.

[1] Bernard Ph. V., Un modèle de croissance régional, in "Cahiers de l'ISEA", série L, nº 142, oct. 1963.

[24] Gosh A., Efficiency in location and interregional flows, North Holland Publishing, 1965.

dustrie du ciment en Inde, pour Hurther et Moses [14] qui répartissent la production du maïs pour diverses années. Le seul modèle envisageant une planification faisant intervenir plusieurs périodes reliées entre elles est celui de Del Punta [16]. En effet, la capacité productive d'une période est fonction des investissements réalisés durant la période précédente et prêts à entrer en activité. Il y a donc là un lien entre périodes.

§ III.- Les contraintes

1. Les contraintes techniques

a) Interprétation

L'interprétation et le sens que nous pouvons donner aux contraintes d'un problème primal vont tout d'abord dépendre du choix comme fonction de préférence d'une fonction à maximum ou d'une fonction à minimum.

Avec une fonction à maximum, nous aurons en général une série de contraintes de la forme $A\underset{\cdot}{x} \leq D$.

La matrice A étant une matrice décomposable en n^2 sous-matrices (1); chaque matrice située sur la diagonale principale étant la matrice de coefficients techniques d'une région, les autres sous-matrices étant nulles, $A\underset{\cdot\cdot}{x}$ nous donnera la consommation totale de matière première et de produits intermédiaires nécessaires pour produire les différents biens entrant dans la matrice X,

---

[14] Hurther A.P., Regional investment and interregional programming, in Papsra (Papers and proceedings of the regional science association), vol. XIII, 1964.

[16] Del Punta V., Sur une application particulière de la programmation linéaire au problème de la programmation régionale, in "Economie appliquée", ISEA, Programmation régionale et théorie économique, nº 2, Tours 14, nº 1, 1961, P.U.F.

(1) n = nombre de régions.

matrice des niveaux d'activité. Le vecteur d représentant les disponibilités en inputs des différentes régions, la contrainte de notre modèle sera que, dans chaque région, la somme des emplois de chaque bien ne peut être supérieure à sa disponibilité régionale.

Nous pouvons raffiner cette analyse en faisant la distinction entre biens internationaux, nationaux et régionaux (1) qui seraient définis de la sorte :

- bien international : bien mobile entre pays;
- bien national : bien mobile à l'intérieur d'un pays;
- bien régional : bien mobile à l'intérieur d'une région.

Ainsi peuvent être précisées les disponibilités régionales:

- pour les biens régionaux, ce serait la production régionale;
- pour les biens nationaux, ce serait la production nationale;
- pour les biens mondiaux, ce serait la production mondiale.

Cette précision est, naturellement , la cause d'une plus grande complexité dans la présentation matricielle du problème(2).

---

(1) Mennes, Tinbergen, stencil.

(2) Soit n biens (- 1 ... 3 = biens régionaux
(- 4 ... n = biens nationaux et internationaux

Soit deux régions : A, b

$$\begin{bmatrix} {}^A a_{11} & & {}^A a_{12} & \cdots & {}^A a_{1n} & \cdots & 0\ 0\ 0\ 0 & & \\ 0 & & 0 & \cdots & 0 & & a^B_{11} \cdot\cdot a^B_{12} & 0\ 0\ 0 & \\ a & - & - & - & - & - & - & & \\ - & - & - & - & - & - & - & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0\ \ 0 & a^A_{14} \cdot\cdot a^B_{14} & 0\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^A_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & X^{13}_1 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & X^A_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ & & & & {}^A X_n \\ & & & & \vdots \\ & & & & {}^B X_1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & X^B_n \end{bmatrix}$$

Une fonction à minimer nous conduira à adopter en général des contraintes de la forme $Ax \geqslant b$.
A et x auront la même interprétation, de même donc que Ax, b pouvant être interprété dans ce cas comme les demandes adressées aux différents secteurs de l'économie.

Les demandes fixées par la solution optimale devront donc être au moins égales à une certaine quantité fixée a priori.

Nous avons de la sorte examiné, théoriquement, quel pouvait être le contenu de chaque contrainte. Cependant, chaque problème constitue un cas particulier et aura donc ses contraintes propres.

A ce point de vue, un modèle caractéristique est celui présenté par Miller [11] et visant à minimer les coûts de transports d'une compagnie d'aviation.

Nous trouvons, à côté de l'équation de satisfaction de la demande

$$\sum_h {}_J a_h{}^K \; {}_J X_h{}^K \geqslant {}_J d^K$$

${}_J A_h{}^K$ = capacité de l'avion h sur la route JK

${}_J d^K$ = nombre de personnes désirant aller de J à K.

Deux autres équations spécifiques au problème envisagé.

$$- \sum_K {}_K X_h{}^J - \sum_K {}_J X_h{}^K \geqslant - {}_J \sigma_h$$

${}_J X_h{}^K$ = avion de modèle h qui vole de J à K.

Nous avons donc une condition de "balance" qui nous impose que, pour une période d'une semaine, il n'y ait pas plus d'avions du type h qui quittent un aérodrome qu'il y en ait qui y entrent (${}_J \sigma_h = 0$).

$$- \sum_j \sum_K {}_J b_h{}^K \; {}_J X_h{}^K \geqslant - S_h$$

---

[11] Miller, cfr. supra.

$J_{bh}K$ = nombre d'heures nécessaires pour transporter un passager de J à K. Il ne faut pas que chaque type d'appareil travaille au-delà d'une certaine limite.

b) Problème

Le but de tout modèle de programmation étant un but essentiellement pratique, puisqu'il s'agit d'obtenir une politique économique optimale, il est donc indispensable que les contraintes retenues reflètent le plus fidèlement possible les limitations existant dans la réalité économique.

Dans le cas d'un problème assez simple, comme par exemple celui qui se pose à Miller, il semble que les contraintes choisies nous donnent à peu près complètement les limites que doivent respecter certaines variables.

Mais, si nous désirons atteindre un objectif plus ambitieux comme la programmation de toute une économie, les contraintes serbnt alors beaucoup moins proches de la réalité.

Prenons un modèle de maximation de la V.A. Les contraintes découlant de ce choix seront les limitations des différents inputs. Nous ne tenons dès lors pas compte d'éléments aussi importants que l'épargne, les investissements.

La solution optimale retenue nous fixera les divers niveaux de production et donc une certaine quantité de consommation finale.

Mais, comment être sûr que cette quantité correspond aux désirs des consommateurs et qu'elle pourra être absorbée par le marché?

D'autre part, une fonction de minimum, avec des contraintes de satisfaction des demandes, ne tiendra pas toujours compte du côté technique du problème.

2. <u>Les contraintes politiques</u>

En dehors de ces contraintes naturelles et de comportement, d'autres contraintes, logique ou politique, apparaissent dans le modèle.

Ainsi, logiquement, le taux d'activité ne peut être supérieur à zéro, d'où la contrainte générale $X \geqslant 0$.

Quant aux contraintes que nous appelons politiques, elles résultent d'une décision gouvernementale.

Ainsi en va-t-il pour l'industrie charbonnière qui se voit imposer par le gouvernement des minima de production; il en est de même pour tous les secteurs recevant un subside gouvernemental.

<u>Section II</u> : <u>L e   d u a l</u>

Les auteurs abordant, dans le cadre de la programmation multirégionale, le problème dual ne sont pas très nombreux. Deux ont retenu notre attention: Isard [21] et Stevens [9].

C'est donc en grande partie sur leurs deux articles que nous nous sommes basé pour élaborer ce second paragraphe.

La fonction objectif du dual comprend autant de variables que le primal compte de contraintes, aussi distinguerons-nous deux modèles duals: celui où le primal associé contient des contraintes sur les produits finals et celui où ces contraintes(1) sont absentes.

---

[21] ISARD W., Methods of regional analysis, Ch. X, M.I.T. 1963.

[9] STEVENS B, An interregional linear programming model, in "Journal of regional science", vol. I, nº 1, 1958

(1)

$(u)\ (d) = Z$ à min.	$(U)\ (d) = Z$ à max.
$(u)\ (A)\quad (C)$	$(U)\ (A)\quad (C)$
$(u) \geqslant (0)$	$(U) \geqslant (0)$
associé à	associé à
$(C)\ (X)$ à max.	$(C)\ (X)$ à min.
$(A)\ (X)\quad (d)$	$(A)\ (X)\quad (d)$
$(X) \geqslant (0)$	$(X) \geqslant (0)$

Les variables endogènes du problème dual peuvent être interprétées comme les prix des ressources rares. Cette interprétation repose sur le raisonnement suivant. [20]

L'on peut prouver (1) que chaque u_i représente la productivité marginale de chaque disponibilité, c'est-à-dire la dérivée de la fonction primal par rapport aux contraintes. Cette façon de s'exprimer n'a vraiment de sens pour l'économiste que si la disponibilité considérée est un facteur de production.

D'autre part, si l'on admet de raisonner dans un schéma d'équilibre classique, c'est-à-dire si l'on admet que le prix d'un facteur de production est égal à sa productivité marginale, u_i est le prix unitaire de ce facteur.

Ce raisonnement vaut pour le dual minimum. Dans un problème dual de maximum, u_i représente le coût marginal du bien i produit pour satisfaire la demande. Et si l'on admet à nouveau de raisonner dans un schéma d'équilibre classique, ce coût marginal est égal au prix unitaire du bien i.

Nous concentrerons notre attention sur le primal maximum-dual minimum.

a) Pas de contrainte sur les produits finals.

Dans ce cas, où la matrice (A) ne contient que les coefficients d'inputs des ressources et des productions intermédiaires, la solution dual ne nous donnera que les prix (u) de ces inputs, prix calculés de façon à minimer la valeur des disponibilités(d) du système économique.

Chacune des contraintes (U) (A) $\geqslant$ (C) aura une signification identique. Il ne peut, pour chacune des activités envisagées, exister de profit; autrement dit, la valeur des ressources et

---

[20] L. DERWA, Notes du cours de recherche opérationnelle appliquée à des problèmes économiques, F.N.D.P., Namur.
(1) [20] p. 22 et suiv.

produits intermédiaires employés par une activité ne peut être que supérieure à un élément de profit égal soit à zéro (pour les activités ne produisant pas de produit primal), soit au prix de vente du bien final (pour les activités produisant un produit final).

La forme de la contrainte variera donc :

α) Pour une activité de biens intermédiaires (X_1).

$$a_{11}\ U_1 + a_{21}\ U_2 + \dots + a_{n\ 1}\ U_n \geqslant 0$$

$$a_{21}\ U_2 + \dots + a_{n\ 1}\ U_n \geqslant a_{11}\ U_1$$

si $a_{11} = 1$

$$a_{21}\ U_2 + \dots + a_{n\ 1}\ U_n \geqslant U_1$$

Ce U_1 (prix de l'intermédiaire 1) est obtenu par la solution du dual.

β) Pour activité de produit final (produisant X_{n+1})

$$a_{1,n+1}\ U_1 + a_{2,n+1}\ U_2 + \dots + a_{n,n+1}\ U_n \geqslant P_{n+1}$$

Ce P_{n+1}, prix de n+1 n'étant pas déterminé par le modèle, il nous faut donc en avoir une connaissance a priori.

Cette connaissance semble impliquer que nous ayons déjà une idée de la solution optimale. En effet, si pour le produit I, nous établissons a priori un prix plus élevé dans la région A que dans la région B, nous avons, a priori, déterminé qu'il n'y aura pas d'exportation de A vers B, nous savons donc que B peut suffire à ses propres besoins.

Si nous établissons les deux prix à un niveau identique, il en découlera qu'il n'y aura aucun mouvement, pour le produit, entre les régions A et B.

Ceci illustre l'importance primordiale de la détermination de ce prix, pour la recherche de la solution optimale.

Le chercheur se trouve devant un dilemme. Il dispose d'une technique qui va lui permettre de déterminer les mouvements interrégionaux; or, il ne peut l'employer que s'il dispose d'une série de prix, ce qui suppose une connaissance de cette détermination.

Il est cependant probable que le programmateur a une idée a priori de ce que vont être les prix. Il sait que telle région ne peut assurer son approvisionnement en tel bien et donc que le prix de ce bien doit être plus élevé dans cette partie du pays que dans une autre région où la production est excédentaire. Cette connaissance a priori ne pouvant être qu'approximative peut aboutir à une solution optimale incompatible avec une allocation raisonnable de la consommation. Si le prix en A est trop élevé, toute la production de B va être exportée vers A au détriment de la consommation de B qui ne pourra plus être satisfaite par sa propre production.

Nous retrouvons donc le même problème que dans le primal, c'est-à-dire comment assurer une allocation de consommation satisfaisante. La solution pour le dual va découler de celle apportée dans le primal, c'est-à-dire imposer des contraintes sur les produits.

b) Contraintes sur les produits :

Cette introduction va donc nous amener à compter dans le dual autant de variables de choix supplémentaires que nous avons introduit de contraintes, soit autant que le nombre de produits finis. Le nombre de contraintes ne changera pas, mais la forme de certaines va se modifier:

Soit X_{n+1} = produit fini

$$a_{1,n+1}\,U_1 + a_{2,n+1}\,U_2 + \dots + a_{n+1,n+1}\,U_{n+1} \geqslant \bar{P}_{n+1}$$

$$a_{1,n+1}\,U_1 + a_{2,n+1}\,U_2 + \dots + a_{n,n+1}\,U_n \geqslant \bar{P}_{n+1} + U_{n+1},$$

$\bar{P}_{n+1}$ étant le prix fixé a priori.

Nous pouvons interpréter cette nouvelle contrainte de la manière suivante : la dépense nécessaire pour se procurer les inputs requis par le fonctionnement de chaque activité au niveau unitaire ne peut être supérieure à la somme du prix fixé a priori ($\bar{P}_{n+1}$) et d'un nouvel élément monétaire (U_{n+1}).

Cet U_{n+1} peut être considéré comme un subside nécessaire pour élever le prix sur un marché afin de lui permettre de satisfaire le minimum de consommation imposée.

Il faut remarquer qu'un dual recalculé sur base de ces nouveaux prix et sans contrainte de consommation, assurerait cette allocation minimale désirée.

La forme de la fonction objectif changera également puisque, pour chaque contrainte introduite dans le primal, s'ajoutera dans la fonction un terme U_{n+i} $(- R_{n+i})$. R_{n+i} étant le minimum de n+i devant être consommé.

L'interprétation à donner à cette fonction sera néanmoins beaucoup plus difficile (1).

Rappelons que, dans le cas où nous n'avons pas de contrainte sur la consommation finale, Min (U) (d) était interprété comme le choix du prix des inputs de façon à minimer la dépense de la nation et formait donc le R.N.

Dès lors que nous introduisions une contrainte telle que

$a^A_{n+1,n+1} \quad x^A_{n+1} \geqslant R^A_{n+1}$ soit R^A_{n+1} le minimum imposé,

qui, dans un primal Max est écrit sous la forme

$a^A_{n+1,an+1} \quad X^A_{n+1} \leqq - R^A_{n+1}$

notre fonction objectif sera

Min $U_1 R_1 + \dots U_n R_n - U_{n+1} R_{n+1} \dots U_{n+m} R_{n+n}$

---

(1) Pour une analyse plus approfondie du problème de l'interprétation du dual, voir L. Derwa, p. 28. [20].

En prenant séparément les deux éléments, nous voyons bien qu'il faut à la fois choisir le prix le plus bas pour les inputs et les prix les plus élevés pour les outputs, pour obtenir le maximum.

L'interprétation générale est la suivante.

Il s'agit de minimer la différence entre un coût et un prix de vente. Nous aurons donc ce résultat final, soit une perte minimale, soit un profit maximal.

Or, la seconde hypothèse ne peut être retenue.

Un profit maximal, solution qui paraîtrait la plus logique, n'est pas possible car cela s'oppose au fait qu'il ne peut y avoir de profit et, d'autre part, il n'est pas possible de voir l'industrie travailler à perte.

Il faut donc que cette fonction soit égale à zéro à l'optimum (perte minimale).

Partie II : Quelques modèles

Nous rappellerons que cette seconde partie est consacrée à la concrétisation de ce que nous avons vu précédemment, concrétisation faite par le moyen de quelques modèles.

Après une brève présentation des hypothèses propres à chacun, nous examinerons la fonction de préférence et les contraintes (1) et nous terminerons par un bref commentaire; nous ne détaillerons pas le modèle qui sera toujours un modèle "d'activité", exception faite de celui de Bernard. Nous commencerons par ce dernier.

---

(1) Nous n'examinerons pas les contraintes de non-négativité.

Section I : Modèle de Bernard [1]

Son but est de nous présenter, pour un état du système économique, la répartition optimale d'un volume donné d'investissement, entre un certain nombre de régions.

§ 1.- Fonction de préférence

Le critère d'optimalité retenu par Bernard est la maximation du produit national net.

Ce maximum sera obtenu en investissant dans les régions les plus favorisées, c'est-à-dire les régions où la production nette, mesurée par exemple en valeur ajoutée, par unité d'investissement, est la plus élevée.

Pour éviter cependant que tout l'investissement ne se passe dans une seule région, il faut introduire dans le modèle un élément régulateur. Ce sera, nous le verrons dans un paragraphe suivant, le facteur démographique.

$B = \sum_i B_i$ Le p.n.n. est la somme des produits régionaux.

§ 2.- Modèle

Les équations du modèle peuvent être divisées en trois catégories : - égalité de définitions;
- équations évaluant les effets d'un investissement;
- élément régulateur du système.

1) Egalité de définitions

a) Le mouvement de population (migration) régional est égal à la différence entre la population en quête d'emploi et l'emploi créé. $A''_i = A'_i - A_i$

b) Le produit net total est, dans chaque région, la différence entre la production brute et le coût de production. $B_i = P_i - C_i$.

---

[1] Bernard Ph. J., Un modèle de croissance régionale, in "Cahiers de l'ISEA", Série L, nº 142, oct. 1963.

c) Le coût total de production est la somme d'un coût de production par unité d'investissement multiplié par l'investissement et d'un coût variable.

$$C_i = C^o_i \, a_i + C'_i.$$

2) Effets de l'investissement

a) L'emploi créé dans une région est proportionnel à l'investissement.

$$A_i = b \, a_i.$$

b) La production régionale est fonction de l'investissement.

$$P_i = a_i \, p_i.$$

c) Chaque unité d'investissement engendre un coût unitaire égal à C^o_i.

3) Elément régulateur

Cet élément régulateur est le facteur démographique. C'est le coût des mouvements de migrations qui empêche que tout l'investissement se fasse dans la région la plus favorisée du point de vue productivité de l'unité d'investissement.

Ce coût C'_i est fonction du taux de migration intervenant dans chaque région.

$$C'_i = f\left(\frac{A''_i}{A'_i}\right)$$

Pour être équilibrante, cette équation ne peut être linéaire. En effet, pour éviter que tout l'investissement ne se concentre dans une seule région, il faut que le coût de production devienne proportionnellement de plus en plus élevé, donc il faut que le coût variable soit autre que linéaire.

Une fonction de coût linéaire laisserait toujours, pour chaque unité d'investissement, un profit identique et donc, la région possédant le profit le plus élevé attirerait tout l'investissement.

§ 3.- <u>Contraintes</u>

La solution optimale résultant de ce modèle doit satisfaire les contraintes suivantes :

1) L'investissement total est égal à la somme des investissemets régionaux.

$$I = \sum_1^n a_i$$

2) L'emploi total est égal à la somme des emplois créés dans chaque région.

$$A = \sum_1^n A_i$$

3) La population en quête d'emploi dans chaque région est égale à l'emploi créé dans le pays.

$$A = \sum_1^n A'_i$$

§ 4.- <u>Dual</u>

Le modèle que nous venons de décrire peut être résolu par programmation linéaire, si nous supposons que la fonction de préférence est linéaire par morceaux.

Le primal aurait dès lors la forme suivante :

$$\text{Max} \sum a_i \, (p_i - C^i{}_o) - f \left(\frac{A''_i}{A'_i}\right)$$

soumis à

$$I = \sum a_i$$

$$A = \sum A_i$$

$$A = \sum A'_i$$

Le dual serait alors

$$\text{Min} \; [U] \begin{bmatrix} I \\ A \\ A \end{bmatrix}$$

soumis à

$$[U] \begin{bmatrix} \Sigma a_i \\ \Sigma A_i \\ \Sigma A'_i \end{bmatrix} \geqslant \left[p_i - C^i{}_o - f \left(\frac{A''_i}{A'_i}\right) \right]$$

Les prix dual $p_i = \frac{\delta f}{\delta x_i}$ (x_i = contrainte)

nous donnent l'effet sur la fonction de préférence d'un relâchement de contrainte, par exemple l'effet sur le produit net d'un investissement supérieur à répartir, d'une création d'emploi moindre que la population en quête d'emploi.

§ 5.- Commentaire

Le modèle nous offre une répartition optimale d'un volume donné d'investissement. Cette répartition se fait entre les régions sur base de coefficients régionaux (1) calculés pour l'ensemble des activités.

Il est cependant à craindre que leurs valeurs, d'activité à activité, soient assez dissemblables. Pour que la solution optimale soit atteinte, nous ne pourrons nous satisfaire de n'importe quelle répartition de chaque investissement a_i entre les diverses activités régionales.

Il faudrait donc améliorer le modèle en dissociant chacune des équations régionales en autant d'équations que la région compte d'activités.

Nous aurions ainsi :

$$P_{ij} = a_{ij}\, p_{ij} \qquad (i = 1 \ldots .\ n \text{ régions})$$

$$A_{ij} = b_{ij}\, a_{ij} \qquad (j = 1 \ldots .\ m \text{ activités})$$

$$C_{ij} = a_{ij}\, C^{o}_{ij} + C'_i$$

$$I = \sum_{ij} a_{ij}$$

$$B_i = \sum_{ij} P_{ij} - \sum_{ij} C_{ij}$$

Les autres équations ne sont pas affectées par cette décomposition.

---

(1) p_i, b, C'_i.

Un autre point du modèle à examiner est la contrainte $A = \sum_i A'_i$.

Quelle diminution du produit national cela entraîne-t-il?

Mais il s'agit là d'un problème de politique économique et non de programmation. Nous pourrions introduire dans ce modèle le phénomène des économies d'échelle par l'intermédiaire d'une fonction $p_i = f\ (a_i)$ linéaire par morceaux. Cette fonction ne pourrait plus bien sûr être calculée à partir de statistiques officielles. Il faudrait l'estimer a priori.

Il faut également remarquer que l'emploi annuel d'un tel modèle, avec donc des p_i différents, tiendrait compte, dans une certaine mesure, des économies d'échelle.

Section II : Modèle de Del Punta [16]

Les hypothèses de base de ce modèle sont les suivantes :

a) Le système économique est divisé en deux régions, (1) et (2), cette dernière étant relativement sous-développée.

b) Le système est fermé.

c) Le plan, solution optimale du modèle, est à 3 ans et est subdivisé en trois périodes d'un an.

§ 1.- Fonction de préférence

L'objectif est de permettre à la région (2) de satisfaire un certain volume de demande finale. Cela exigera la création d'une capacité de production additionnelle. Cet objectif sera :

$$G^2 = \begin{bmatrix} g^2_1 \\ \vdots \\ g^2_n \end{bmatrix}$$

---

[16] Del Punta V., "Sur une application particulière de la programmation linéaire au problème de la programmation régionale", in "Economie appliquée", I.S.E.A., Programmation régionale et Théorie économique, nº 2, Tome 14, nº1 1961.PUF.

Chaque g^2_i représente la quantité du bien i que le système doit pouvoir mettre à la disposition de la demande finale de la région (2), à la fin de la période de planification.

La fonction à maximer tranchera un peu sur les fonctions habituelles.

En effet, cette fonction est :

Max λG^2 où l'élément G^2 est fixe. Il nous faut donc maximer "λ" qui est un "facteur d'échelle", de façon à obtenir au terme du plan la valeur maximum pour λG^2, c'est-à-dire, en fait, la valeur maximum de la demande finale.

L'objectif ne sera atteint que si la solution nous donne $\lambda \geqslant 1$, il sera dépassé si λ est supérieur à l'unité.

§ 2.- Contraintes

Le modèle de Del Punta ne comporte qu'une seule espèce de contraintes.

Pour chaque période du plan, la capacité productive régionale doit être suffisante pour satisfaire les besoins totaux de la région. Ces besoins sont représentés par le produit de l'inverse de Leontief par le vecteur de la demande totale, vecteur obtenu en ajoutant à la demande finale la quantité des ressources destinées aux investissements pendant la période considérée, ainsi que les exportations vers l'autre région et en déduisant de ce total les importations.

Le fait que la capacité productive initiale doive satisfaire seule les besoins de la période implique que, pendant cette période, ne se produise aucune création de capacité.

La création de nouvelles capacités productives exige donc un an.

Nous avons les six contraintes suivantes : (1)

$$C^1(0) \geqslant L^1 \left[Y^1(1) + B^1 D^1 (1) + E^1 (1) - E^2 (1) \right]$$

$$C^2(0) \geqslant L^2 \left[Y^2(1) + B^2 D^2 (1) + E^2 (1) - E^1 (1) \right]$$

$$C^1(1) \geqslant L^1 \left[Y^1(2) + B^1 D^1 (2) + E^1 (2) - E^2 (2) \right]$$

$$C^2(1) \geqslant L^2 \left[Y^2(2) + B^2 D^2 (2) + E^2 (2) - E^1 (2) \right]$$

$$C^1(2) \geqslant L^1 \left[Y^1(3) + B^1 D^1 (3) + E^1 (3) - E^2 (3) \right]$$

$$C^2(2) \geqslant L^2 \left[Y^2(3) + B^2 D^2 (3) + E^2 (3) - E^1 (3) \right]$$

auxquelles s'ajoute une contrainte qui indique qu'à la fin du plan, la capacité productive de la région (2) doit atteindre un niveau tel qu'elle puisse permettre de satisfaire les besoins totaux de production (selon l'acception de Leontief) nécessaire à la satisfaction de la"demande finale-objectif" multipliée par le facteur d'échelle.

$$C^2(3) = C^2(0) + D^2(1) + D^2(2) + D^2(3) \geqslant \lambda (L^2\ b^2)$$

---

(1) Les symboles ayant la signification suivante :

L^j = Inverse de Leontief = $(I - A^j)^{-1}$

A^j étant la matrice des coefficients techniques de la région j.

$Y^i(t)$ = Demande finale de la région (i) pendant la période t.

B^i = Matrice des coefficients de capital

$D^i(t)$ = Investissement dans la région i à t.

$= C^j(t) - C^j(t-1)$

$E^i(t)$ = Exportation de la région i.

§ 3.- <u>Le dual</u>

Le primal du podèle peut être représenté sous forme matricielle, de la façon suivante :

$$\text{Max } f = \lambda$$

Soumis à

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
L^1B^1L^1 & -L^1 & & & & & & & & & & & \\
 & -L^2 & L^2 & L^2B^2 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
-I & & & & L^1B^1L^1 & -L^1 & & & & & & & \\
 & & & -I & & L^2 & L^2 & L^2B^2 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
-I & & & & -I & & & & L^1B^1 & L^1 & -L^1 & & \\
 & & & -I & & & & -I & & L^2 & L^2 & L^2B^2 & \\
 & & & -I & & & & -I & & & & -I & L^2b^2
\end{bmatrix}}_{[A]}
\underbrace{\begin{bmatrix}
D^1(1) \\ E^1(1) \\ E^2(1) \\ D^2(1) \\ D^1(2) \\ E^1(2) \\ E^2(2) \\ D^2(2) \\ D^1(3) \\ E^1(3) \\ E^2(3) \\ D^2(3)
\end{bmatrix}}_{[X]}
$$

$$
\leq
\underbrace{\begin{bmatrix}
C^1(0) - L^1Y^1(1) \\
C^2(0) - L^2Y^2(1) \\
C^1(0) - L^1Y^1(2) \\
C^2(0) - L^2Y^2(2) \\
C^1(0) - L^1Y^1(3) \\
C^2(0) - L^2Y^2(3) \\
L^2(0)
\end{bmatrix}}_{[d]}
$$

Le dual serait alors

$$\text{Min } [u]\ [d]$$

soumis à

$$[A'] \ [u] \geqslant c$$

La solution optimale nous donnerait les prix duals $\frac{\delta \lambda}{\delta x_i}$ (x_i représentant la contrainte i), c'est-à-dire l'accroissement de la fonction de préférence qu'entraînerait un relâchement des contraintes, soit une augmantation de la capacité initiale, soit une diminution de la demande finale pendant l'une quelconque des périodes. La fonction de préférence pourrait être interprétée comme le choix des prix duals qui miniment la valeur de l'investissement et du solde Exportation moins Importation.

§ 4.- Commentaire

Un des traits particuliers du modèle réside dans le fait qu'il concerne uniquement les quantités physiques. Il n'y a aucun élément monétaire. Del Punta explique cette exclusion en ces termes : "Nous avons la conviction qu'à la base du processus contemporain de développement accéléré figurent plus les problèmes de la distribution des ressources considérées dans leurs aspects physiques que de l'acceptation de notre part du concept de voile monétaire.

"La politique fiscale ou celle du taux d'intérêt sont des moyens destinés à faciliter la répartition des ressources entre consommation et investissement ~~et~~ non comme des éléments en fonction desquels la distribution peut s'effectuer par le seul jeu des forces du marché.

"La formation du capital ne sera pas fonction du mécanisme capital-intérêt, mais le mécanisme sera fonction de la formation en ce sens qu'il devra la favoriser."

Nous ne répéterons pas ce que nous avons écrit quelques pages plus haut, concernant la fonction de préférence et le caractère dynamique du modèle.

Le fait que le modèle ne comporte aucun élément monétaire peut cependant amener certains doutes. Nous pensons que les bases sur lesquelles sont déterminés les niveaux d'importation et d'exportation sont insuffisantes. Seuls, en effet, l'objectif de demande finale et les limitations de capacités productives interviennent. Il semblerait normal de faire intervenir un élément monétaire, par exemple le profit.

Ce profit déterminerait le choix entre un surcroît d'investissement ou un surcroît d'importations. Alors que, à la fin du plan, la dernière contrainte ne laisse place à des échanges interrégionaux, puisque la capacité productive de la région (2) doit satisfaire toute la demande finale.

En effet, il est possible que, dans certains cas, le sous-emploi ou le non-emploi d'une capacité régionale, accompagné d'importations en provenance de l'autre région (1) soit préférable au plein-emploi, accompagné d'importations moins importantes ou nulles. De ce point de vue, un modèle du genre Stevens [9] comportant une fonction de préférence de profit et des contraintes de minimum de consommation semble préférable.

---

(1) Et cela même au prix de la création de capacités supplémentaires dans cette autre région, capacités devant satisfaire cette demande d'importations.

[9] Stevens, "An interregional linear programming model", in "Journal of regional science", vol. 1, nº 1, 1958.

Section III : M o d è l e   d ' I s a r d [22]

Ainsi que nous allons le voir, ce modèle est plus complexe que ceux examinés dans les deux premières sections. Ceci a lieu au détriment de sa capacité à être employé à la résolution de problèmes concrets.

Cette complexité tient aux faits suivants :

1) Nous supposons que le bien A produit dans une région est un bien différent de ce même bien produit dans une autre région. La matrice générale des coefficients techniques comportera donc des éléments non-nuls ailleurs que sur la diagonale principale (1).

2) Création d'activités d'expéditions, pour chaque activité du système, afin d'introduire les liaisons interrégionales.

3) Activités-fantômes, transformant les biens intermédiaires en produits finals.

4) Elément monétaire intervenant, puisque nous devons fixer a priori le prix de chaque bien final.

Chacun de ces éléments contribue ainsi à la complexité, du moins formelle, du modèle.

---

[22] ISARD W., Methods of Regional Analysis, ch. X, M.I.T., 1963.

(1)	Région (1)	Région (2).....	Région (n)
Région (1)	${}^{1}a_{ij}$	${}^{2 - 1}a_{ij}$	${}^{1 - n}a_{ij}$
Région (2)	${}^{1 - 2}a_{ij}$	${}^{2}a_{ij}$	${}^{2 - n}a_{ij}$
⋮			
Région (n)	${}^{1 \quad n}a_{ij}$		${}^{n}a_{ij}$

§ 1.- Primal

1) Fonction de préférence

C'est la maximation de la somme des revenus régionaux qu'Isard a choisie comme fonction de préférence de son modèle.

$$\text{Max} \quad r = \sum_{L=1}^{u} \sum_{j=1}^{v} C^L_j \quad X^L_j$$

X^L_j = taux auquel l'activité j fonctionne dans la région L.

C^L_j = revenu engendré par l'activité j de la région L fonctionnant à un niveau unitaire.

Ce revenu unitaire est égal, pour chaque activité, à la valeur des biens finals qu'elle produit en fonctionnant au niveau unitaire.

Seules donc, les activités produisant un bien final engendrent un revenu.

Pour une activité j produisant un seul bien final (i) et fonctionnant au niveau unitaire ($a_{ij} = 1$), le revenu sera égal au prix unitaire du bien final i.

Pour des activités produisant plusieurs biens, ce revenu unitaire sera :

$$C^L_j = \sum_{i=1}^{v} a^L_{ij} \; p^L_i$$

Pour les activités produisant uniquement des biens intermédiaires, ce profit unitaire est donc égal à zéro.

2) Contraintes

Comme pour le modèle Del Punta, les contraintes du modèle sont des contraintes de capacités. Elles portent sur l'emploi des ressources, des produits intermédiaires et des produits finals.

a) Intermédiaires

La somme des emplois de chaque ressource ne peut être supérieure à son offre initiale.

Soit $$- \sum_{j=1}^{v} a^{L}_{Kj} \quad X^{L}_{j} - \sum_{j} {}_{J} \; a^{JL}_{Kj} \quad X^{J}_{j} \leq R^{L}_{K}$$

R^{L}_{K} = offre initiale de ressources

a^{L}_{Kj} = nombre d'unités de la ressource k de la région L nécessaires pour produire en L une unité du bien j.

a^{JL}_{Kj} = nombre d'unités de la ressource k de la région L nécessaires pour produire en J une unité de j.

L'emploi de ces derniers coefficients est rendu nécessaire par l'hypothèse faite par Isard que chaque bien régional est un bien particulier.

b) La contrainte portant sur les biens intermédiaires sera identique, mais la valeur de R_{K}^{L} sera, dans ce cas, égale à zéro.

L'emploi de chacun de ces biens ne peut donc être supérieur à sa production (1).

c) Une contrainte sur chaque produit final peut être introduite dans le modèle afin d'assurer une efficience minimale de la consommation.

Soit $$\sum_{j} \sum_{J} a^{J}{}_{k_j}{}^{L} \quad X^{J}_{j} \geqslant - R_{K}^{L} \qquad \begin{matrix} (J = 1 \; .... \; u) \\ (L = 1 \; .... \; u) \end{matrix}$$

$- R_{K}^{L}$ sera bien sûr une quantité positive.

---

(1) La matrice des coefficients techniques régionaux comportera donc une diagonale principale comportant des coefficients positifs, exception faite pour les lignes et colonnes correspondant aux fessources.

§ 2.- Dual

Fonction de préférence

La solution optimale sera trouvée lorsque le prix des ressources aura été fixé de manière à minimer le coût d'emploi de ces inputs.

Soit Min $W = \sum_{i} \sum_{L} R^{L}_{i} \; P^{L}_{i}$

R^{L}_{i} = offre initiale de la ressource i dans la région L(1).

P^{L}_{i} = prix du bien i dans la région L.

§ 3.- Commentaires

Le modèle d'Isard est un modèle d'activité. Sont donc considérés comme exogènes les éléments suivants :

1) Les conditions techniques de fonctionnement des diverses activités, conditions reflétées par les coefficients techniques.

2) Les capacités de biens primaires (2), de biens intermédiaires et, éventuellement, des biens finals (3).

Les contraintes portant sur les biens intermédiaires nous disent seulement que l'on ne peut en utiliser plus que l'on n'en produit.

Il ne semble donc pas que le modèle tienne compte des capacités productives installées dans chaque région, puisque nous n'avons pas de limites à la production des biens intermédiaires autres que celles résultant de la limitation des inputs biens primaires.

Le modèle Isard se dégage donc d'une certaine manière de

---

(1) Lorsque des contraintes de consommation figurent dans le modèle, cet R^{L}_{i} représente également la quantité minimum de bien i devant être consommée dans la région L, quantité affectée d'un coefficient négatif.

(2) Ces capacités constitueront les contraintes principales du modèle.

(3) Les contraintes de capacité portant sur les biens finals sont les contraintes de minimum de consommation.

la structure existante et recherche une localisation idéale (1), abstraction faite des capacités productives installées (2). D'autre part, nous devons souligner la rigidité qu'entraîne l'hypothèse de non-homogénéité des divers biens régionaux.

Les coefficients techniques résultant de cette hypothèse imposent que, dans la solution optimale, la répartition des inputs suivant leur région d'origine soit, pour chaque activité, identique à celle existant au moment du calcul des coefficients.

Il est probable que cela entraîne une diminution de la valeur de la fonction de préférence.

Toutefois, cette hypothèse peut être le reflet non d'une non-homogénéité physique mais d'une non-homogénéité monétaire. Les coefficients techniques refléteraient alors la différence de prix entre les divers produits régionaux.

L'emploi de coefficients type Isard suppose, pensons-nous, un équilibre dans la localisation des activités productrices de biens intermédiaires, équilibre résultant de l'influence d'une part des capacités régionales en biens primaires et, d'autre part, des conditions de production existant dans chaque région(3). En fait, ce modèle ne nous donnera que la localisation optimale des activités produisant des biens finals.

La localisation des activités intermédiaires découlera des coefficients de production de ces biens finals dans chaque région. Ceci est corroboré par le fait que seuls les biens finals interviennent dans la fonction de préférence.

---

(1) Le but du modèle est la recherche du taux d'activité optimal. Mais, comme nous ne tenons pas compte des capacités installées, ceci revient à rechercher la localisation optimale des diverses activités.
(2) Au contraire du modèle Del Punta.
(3) Productivité de la main-d'oeuvre, situation géographique de la région, moyens de transport...

La localisation d'une activité intermédiaire ne saurait en aucune façon influencer la fonction de préférence puisque celle-ci n'engendre aucun revenu. Elle dépend donc uniquement des conditions techniques de production.

Section IV : Modèle de Stevens [9]

La conception de ce modèle est assez proche de celle du précédent. Il s'agit également d'un modèle général assez complexe.

§ 1.- Primal

1) Fonction de préférence

La fonction est assez semblable à celle d'Isard, exception faite qu'il faut ici fixer les niveaux d'exportations de chaque bien et non le niveau de production. Pour connaître celui-ci, il est donc nécessaire d'additionner toutes les exportations d'un produit.

$$\text{Max } Z = \sum_{J} \sum_{e} {}^{J}S_{fe}{}^{L} \, P_{fe}{}^{L} + \sum_{J} \sum_{d} {}^{J}S_{id}{}^{L} \; 0.$$

S^{JL}_{fe} = livraison du bien final e de J vers L.

S^{JL}_{id} = livraison du bien intermédiaire d de J vers L.

P^{L}_{fe} = prix du bien final e dans la région L.

2) Contraintes

a) Contrainte de minimum de consommation :

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que la solution d'un modèle primal nous donnait une allocation efficiente des ressources mais pas de la consommation.

---

[9] Stevens, An interregional linear programming model, in "Journal of regional science", vol. 1, nº 1, 1958.

De telles contraintes nous assurent qu'une efficacité minimum de l'allocation de la consommation sera atteinte.

$$- \sum_{J} S^{JL}_{fe} \leq - C_{fe}^{L}$$

C_{fe}^{L} = minimum de consommation du bien final e devant être atteint dans la région L.

b) Contraintes de capacité :

Les autres contraintes seront des contraintes de capacité, valant pour les fessources, les produits intermédiaires et les produits finals.

- Ressources :

$$\sum_{J} \sum_{d} r_c a_i d^L S^{LJ}_{id} \leq E_{R\,c}^{L}$$

$r_c a_i d^L$ = nombre d'unités de la reccource c nécessaires pour produire une unité du bien intermédiaire d dans la région L.

S^{LJ}_{id} = nombre d'unités du bien intermédiaire d produites en L et livrées à O.

$E_{r\,c}^{L}$ = maximum de ressources c disponibles dans la région L.

- Intermédiaires :

$$\sum_{J} \sum_{h} id\, a_{ih}^{L} S^{LJ}_{ih} + \sum_{J} \sum_{e} id\, a^{L}_{fe} S^{LJ}_{fe} - \sum_{J} S^{JL}_{id} = 0$$

$$\sum_{J} \sum_{h} im\, a^{LJ}_{ih} S^{LJ}_{ih} + \sum_{J} \sum_{e} im\, a^{LJ}_{fe} S^{LJ}_{fe} - \sum_{J} S^{JL}_{im} = 0$$

$i_d a_{ih}^{L}$ = nombre d'unités du bien intermédiaire d nécessaires pour produire dans la région L une unité de l'intermédiaire h.

$i_d a^{L}_{fe}$ = nombre d'unités du bien intermédiaire d nécessaires pour produire dans la région L une unité du bien final e.

$i_m a^{LJ}_{ih}$ = nombre d'unités de services de transport (m) nécessaires pour transporter une unité du bien intermédiaire h de la région L à la région J.

$i_m\, a^{LJ}_{fe}$ = nombre d'unités de services de transport nécessaires pour transporter une unité de bien final e de la région L vers la région J.

S^{LJ}_{ih} = nombre d'unités d'intermédiaires h transportées de L à J.

S^{LJ}_{fe} = nombre d'unités de bien final e transportées de L à J.

§ 2.- Dual

1) La fonction objectif

De même que chez Isard, il s'agit de minimer la valeur des ressources, mais à laquelle s'ajoute la valeur des produits finals.

Soit $\text{Min } Z' = \sum_{c}^{m} \sum_{L}^{u} E^L_{rc}\, U^L_{rc} + \sum_{d}^{n} \sum_{L}^{u} (0)\, U_{id}^{L} + \sum_{e}^{n} \sum_{L}^{u} (-C_{fe}^{L}) W_{fe}^{L}$

U_{rc}^{L} = rente imputée à la ressource c dans la région L.

U_{id}^{L} = prix fantôme du bien intermédiaire d dans la région L.

W_{fe}^{L} = rente d'utilité de localisation imputée au produit final e (que nous avons interprétée dans la première partie comme une subvention à ajouter au prix fixé a priori pour que les contraintes de minimum de consommation soient respectées).

2) Contraintes

Ce sont également des contraintes de non-profit.

$$\sum_{c=1}^{n} rc\; a_{id}^{L}\; U_{rc}^{L} + \sum_{h=1}^{n} ih\; a_{id}^{L}\; U_{ih}^{L} + im\; {}^{L}a_{id}^{J}\; U_{im}^{L} \geq U^{J}_{id}$$

(L, J = 1 .... U)

(d = 1 .... n)

$$\sum_{e} id\;\; a_{fe}^{L}\; U_{id}^{L} + im^{L}\; a_{fe}^{J}\; U_{im}^{L} \geq W_{fe}^{J} + P_{fe}^{J}$$

$(\frac{L}{J} = 1 \;....\; U)$

(e = 1 .... n)

§ 3.- Commentaire

Le modèle de Stevens est construit de façon assez semblable, du moins formellement, à celui d'Isard.

Toutefois, la manière dont la matrice technique est construite n'entraînera pas la même rigidité dans la détermination des taux d'activité.

Par l'intermédiaire des exportations interrégionales, le modèle cependant permet, comme celui d'Isard, l'utilisation d'input d'autres régions, mais cet usage chez Stevens n'entraîne plus la même rigidité dans le taux d'activité des secteurs produisant des biens intermédiaires.

Ce ne sont donc pas des conditions techniques qui vont déterminer le taux des exportations de biens intermédiaires.

Et comme, dans ce modèle non plus, ces taux ne peuvent influencer la valeur de la fonction de préférence, aucun élément monétaire n'intervient également dans cette détermination.

Il nous faut donc conclure que cette détermination est indifférente, à la condition que le volume total de chaque bien intermédiaire réponde aux besoins totaux des activités "finales".

Avec les contraintes portant sur les biens intermédiaires, nous retrouvons le même problème de méconnaissance de la structure des capacités productives installées.

L'introduction de contraintes portant sur les capacités productives de biens finals changerait le sens du modèle. La solution optimale ne nous donnerait plus alors une localisation optimale des activités mais les taux optimaux auxquels les capacités existantes devraient fonctionner. Aucun changement dans la localisation des activités ne serait possible dans le cadre d'un tel modèle (1).

(1) Le même problème ne se retrouve pas chez Del Punta. Il introduit en effet des augmentations des capacités productives, ce qui, pour un modèle statique du genre Isard et Stevens, n'est pas possible. (suite page suivante)

Chapitre II - RECHERCHE EMPIRIQUE

Après avoir, dans la seconde section du chapitre précédent, examiné quelques modèles particulièrement représentatifs, nous allons, dans ce second chapitre, tenter de résoudre le problème de savoir s'il existe des informations statistiques correspondant aux variables théoriques de plusieurs modèles, ou tout au moins espérons-nous indiquer une procédure permettant, au prix de certaines hypothèses, d'arriver à une connaissance chiffrée.

Nous aurions ainsi franchi une première étape dans la voie menant au calcul d'une répartition régionale "optimale" des activités.

Pour chacun des modèles envisagés, nous traiterons trois points :

1. Nous examinerons les diverses variables dont nous devons connaître la valeur pour pouvoir faire fonctionner le modèle.

2. Nous passerons ensuite en revue les variables dont nous pouvons directement obtenir la valeur et nous indiquerons les revues, bulletins, etc... où ces informations sont disponibles.

3. Enfin, pour les variables restantes, nous essaierons de trouver les moyens qui nous permettraient d'obtenir au minimum une valeur très proche de la valeur réelle mais inconnue.

Suite note (1) page précédente.

Le modèle Del Pùnta ne tient pas compte cependant du profit engendré par chaque activité, comme nous l'avons déjà vu.

Section 1 : M o d è l e   t y p e   "B e r n a r d"

§ 1.- Les variables du modèle

Rappelons que le modèle comprend les variables exogènes suivantes :

1) $I = \sum_{r=1}^{n} a_i$ = la valeur de l'investissement à répartir entre les régions

2) A'' = migration

3) A' = population en quête d'emploi

4) p_i = production engendrée par une unité d'investissement dans chaque région

5) b = emploi créé par une unité d'investissement

6) C_{i^o} = coût unitaire qu'engendre une unité d'investissement

7) C'_i = coût variable de production qui est fonction des mouvements migratoires.

§ 2.- Les variables dont nous avons une connaissance directe

1) $I = \sum_{r=1}^{n} a_i$

L'I.N.S. nous donne (1) la répartition par province et par région linguistique, pour les différentes activités qu'il distingue dans l'économie nationale, de l'investissement brut.

En faisant la somme des investissements effectués dans les différents secteurs d'une région, nous obtiendrons les différents investissements régionaux. Ils seront nécessaires dans le calcul des points 4 et 5.

(1) Par exemple, dans le nº 3 d'études statistiques et économétriques.

2) A" = migration

L'annuaire statistique nous donne les migrations entre arrondissements. Il nous suffit donc, pour obtenir les migrations entre provinces, d'agréger les différents arrondissements composant une province.

Cette connaissance ne sous sera pas utile dans la recherche d'une solution optimale, puisque les migrations sont déterminées par l'équation $A''_i = A'_i - A_i$, c'est-à-dire la différence entre la population en quête d'emploi et l'emploi créé dans la région. Nous verrons cependant plus loin son utilité.

3) A' = population en quête d'emploi

L'Office national de l'Emploi public, dans son bulletin mensuel, **le nombre** de chômeurs complets, de chômeurs employés par les pouvoirs publics et le nombre de demandeurs d'emploi, inscrits volontairement dans les bureaux de l'office.

Ces chiffres, pensons-nous, devraient être corrigés de trois manières :

a) Comme l'équation A = A' ne vaut que d'une manière globale et non pour chaque type particulier d'emploi, il serait souhaitable de tenir compte des offres d'emploi non-satisfaites, mais qui pourraient l'être après une reconversion de la population en quête d'emploi.

b) D'autre part, ces chiffres comprennent des personnes difficilement réemployables et qui pourraient être considérées comme chômeurs définitifs.
Ainsi, les chômeurs complets sont subdivisés en chômeurs à aptitude normale, partielle et très réduite, et il est probable qu'environ 30 % seulement de chômeurs employés par les pouvoirs publics aient une aptitude normale.

c) Enfin, parmi les demandeurs d'emploi libres, certains ont une occupation.

§ 3.- Variables dont nous n'avons pas une connaissance directe

1) La production qu'engendre une unité d'investissement p_i.

Le modèle de Bernard nous donne l'équation suivante :

$$P_i = a_i \; p_i$$

La production totale de la région i est égale au produit du nombre d'unités d'investissements installés dans la région i par la production qu'entraîne une de ces unités.

Nous a vons vu, dans le paragraphe 2, que nous pouvions avoir les chiffres d'investissements régionaux pour chaque activité.

D'autre part, nous connaissons également l'output régional de chacune de ces activités (1). Nous pouvons agréger ces deux séries statistiques de façon à avoir l'investissement régional total et l'output régional total.

En prenant les accroissements annuels d'output et les investissements annuels, il nous est possible de calculer un p_i marginal brut.

2) b = emploi créé par une unité d'investissement

Ce coefficient b est fixe, il est identique pour chaque région (2). Aussi, pour les calculer, nous suffit-il de connaître la population travaillant effectivement et l'investissement national.

Cet investissement, nous le connaîtrons par la ssomme des investissements régionaux.

Quant au troisième élément de l'équation $A_i = ba_i$, l'annuaire statistique nous donne une répartition sectorielle des travailleurs occupés, il nous suffit d'en faire la somme.

---

(1) Etudes statistiques et économétriques nº 14.
(2) Ce qui n'est pas nécessairement logique.

Nous devons cependant tenir compte des indépendants. Le recensement de 1961 publié par l'I.N.S. nous donne, dans la classification socio-professionnelle de la population active, le nombre d'indépendants. Nous pouvons donc calculer le pourcentage d'indépendants par rapport aux salariés.

Nous pourrons ainsi, sur base de ce pourcentage, obtenir pour d'autres années que 1961, la population totale au travail. La différence d'une année à l'autre de cette population ne peut être attribuée à l'investissement brut mais bien à l'investissement net.

Dès lors, il nous faudra retrancher de cet investissement les amortissements (1). En effet, les mouvements d'emploi peuvent être décomposés en trois phases :

- perte d'emploi due à l'usure du capital;
- création d'emplois due au remplacement de ce capital et qui devrait avoir une valeur assez proche de la perte d'emploi;
- création d'emploi due aux investissements nets.

Les deux premières phases s'annulant, les mouvements d'emploi que nous enregistrons ne sont dus qu'à l'investissement net.

A partir de l'accroissement d'emploi et de l'investissement net, il nous sera ainsi possible de calculer le coefficient b national.

Nous pouvons également, pour obtenir b, employer la méthode utilisée par J. Paelinck et J. Waelbroeck (2) , qui est basée sur l'analyse des dossiers introduits auprès de la S.N.C.I. et du ministère des affaires économiques et de l'énergie par les

(1) Donné par les comptes nationaux. Bulletin de statistiques
(2) J. Paelinck et J. Waelbroeck, Programmation économique et modèles économétriques de croissance, Bibliothèque de l'Institut de Sciences économiques, Université de Liège, I.S.E.L. éd. Georges Thone, Liège 1963.

entreprises désireuses d'obtenir des crédits d'investissements dans le cadre de la loi d'aide aux investissements de 1959, ces dossiers nous renseignent sur le nombre d'emplois nouveaux créés par ces investissements.

Nous pouvons ainsi calculer le coefficient b qui relie les investissements et les emplois nouveaux qui en résultent.

3) $C_{i°}$ = le coût unitaire qui engendre un investissement supplémentaire

Ce coût pourra être calculé à partir de l'équation $C_i = a_i\ C_{i°} + C'_i$ (le coût total de production est égal à la somme d'un coût fixe $a_i\ C_{i°}$ et d'un coût variable C'_i, qui est un coût engendré par les migrations entre régions).

Supposons que nous connaissions le coût variable C'_i, coût dans lequel se trouve inclus le coût de main-d'oeuvre.
Le coût unitaire de production (1) qu'engendre une unité d'investissement sera alors calculé de la façon suivante :

L'I.N.S. nous fournit (2) pour chaque région les inputs requis par chaque activité.

Nous pouvons supposer que la valeur de ces inputs reflètera assez fidèlement la valeur $C_i - C'_i = a_i\ C°_i$.

Connaissant donc $C_i - C'_i$ et a_i, nous pouvons toujours, en travaillant sur les accroissements d'inputs et sur les investissements bruts, obtenir une valeur moyenne du coût fixe unitaire de production $C°_i$

4) Il ne nous restera donc, pour pouvoir calculer grâce au modèle de Bernard, une solution optimale, qu'à obtenir une estimation du coût de migrations pour chaque région.

---

(1) C'est-à-dire, tous les autres coûts, excepté la main-d'oeuvre, matières premières, produits intermédiaires, transports, etc...
(2) Etudes statistiques et économétriques, nº 3.

Nous n'avons, jusqu'à présent, pas eu connaissance d'une telle étude pour une province belge.

Pour pouvoir calculer le coût variable $C' = f\left(\frac{A''}{A'}\right)$, il nous faudrait en premier lieu le décomposer.

Nous pensons pouvoir ramener le coût de migration à trois "sous-coûts":

a. Coût de main-d'oeuvre, qui reflète le fait qu'il faut de plus en plus augmenter les salaires pour pouvoir attirer un nombre croissant de travailleurs dans une région (1).

   Nous proposons, pour calculer ce coût, la solution que voici: connaissant la part des salaires dans le produit national (2), nous allons, à partir du coût des inputs, calculer le coûts des salaires pour chaque région (3).

b. Coût de logement.

   Il semble raisonnable de faire l'hypothèse que la grande majorité des migrations se fait vers les zones de fortes concentrations urbaines et industrielles.
   Un examen de dossiers de demandes d'aide à l'office du logement (Loi De Taye ...) à la Caisse d'Epargne, devrait nous permettre de nous faire une idée approximative du coût de construction d'un nouveau logement pour une famille moyenne belge.

c. Coût du capital inactif.

   Nous devrons tout d'abord tenir compte des logements inoccupés, ce nombre de logements étant fonction du nombre d'émi-

---

(1) Cette augmentation servant à vaincre la force de l'habitude, à couvrir les frais de déménagements, ...
(2) Par exemple : Bulletin de statistique : nº 6, 1963.
(3) Soit la part des salaires = 57,1 % en 1960, le coût des inputs sera de 42,9 % et nous aurons :

$$\text{coût des salaires} = \frac{\text{coût des inputs} - 57{,}1}{42{,}9}$$

grations, diminué du nombre de nouveaux ménages.

Toutefois, nous ne connaissons pas le nombre de ménages qui émigrent. Il nous faudra donc diviser le nombre total d'émigrés par la grandeur moyenne d'une famille pour obtenir une approximation. Il ne nous semble pas qu'il faille tenir compte du capital industriel inactif qui est la cause des migrations et qui n'est pas causé par celles-ci.

Toutefois, il serait peut-être préférable, pour les activités spécifiquement locales et dirigées vers la consommation, de prévoir un coût de migration qui résulterait de la perte de consommateurs.

Nous pourrions, pour ces industries, avoir un coût qui serait égal à l'output divisé par le nombre d'habitants dans la région et multiplié par le nombre d'émigrants. Nous pourrions ainsi obtenir une approximation du coût variable C'_i, fonction du rapport $\frac{A''_i}{A'_i}$.

Comme nous connaissons C'_i, A''_i et A'_i, il nous serait alors possible d'ajuster une fonction reliant C'_i au rapport $\frac{A''_i}{A'_i}$.

Section 2 : Modèle type Del Punta

§ 1.- Variable exogène du modèle

Nous devons, pour pouvoir calculer, grâce à ce modèle, une solution optimale, disposer des informations suivantes :

1) L'objectif de demande finale :

$$G^2 = \begin{bmatrix} g^2_1 \\ \vdots \\ g^2_n \end{bmatrix}$$

2) La demande finale régionale pendant chaque période du plan :

$$Y^j_{(t)} = \begin{bmatrix} Y^j_1(t) \\ \vdots \\ Y^j_n(t) \end{bmatrix}$$

3) Les capacités productives de chaque région au début du plan :

$$C^j(0) = \begin{bmatrix} C^j_1(0) \\ \vdots \\ C^j_n(0) \end{bmatrix}$$

4) Les matrices régionales des coefficients de capital de Leontief, c'est-à-dire les coefficients moyens bruts :

$$B = \begin{bmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & B^2 \end{bmatrix}$$

5) Les matrices régionales des coefficients techniques :

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix}$$

§ 2.- Variable dont nous avons une connaissance directe

1) L'objectif de demande finale

Le choix de cet objectif n'incombe pas à l'économiste, celui-ci se cantonnant normalement dans le domaine des moyens.

Ceci dit, nous pouvons envisager deux manières de connaître l'objectif :

a) L'objectif est choisi par le décideur politique. L'économiste pourra en avoir une connaissance directe s'il est chargé par l'autorité publique de calculer le programme optimal permettant d'atteindre l'objectif fixé, indirecte si sa recherche est purement scientifique; il pourra alors se faire une idée de l'objectif, par consultation de rapports,interviews.....

b) L'objectif peut être calculé dans un autre modèle, sur base d'une fonction de préférence collective.

De toute façon, l'objectif de demande finale constituera une variable exogène.

2) La demande finale régionale pendant chaque période du plan

a) Pour la région sous-développée :

Nous connaissons la valeur de la demande finale à la fin de la période de planification. Nous pourrions, connaissant la valeur initiale de cette demande, répartir son accroissement sur chaque période, de façon à avoir une croissance équilibrée.

Il nous faudra donc répartir régionalement la valeur de la consommation nationale.

Nous pourrions le faire par une enquête empirique mais peut-être pourrions-nous arriver à une approximation suffisante (1) en faisant cette décomposition sur base de la répartition régionale du revenu national, qui nous est donné, par exemple, dans le Bulletin de Statistiques de l'I.N.S.

Une première vérification de cette méthode nous serait possible, grâce au nº 7 d'études statistiques et économétriques, publié par l'I.N.S., qui nous donne la consommation pour la région flamande,wallonne et bruxelloise.

Peut-être, dans la répartition temporelle de l'accroissement de demande finale,pourrions-nous tenir compte d'un facteur

---

(1) Pour cela, il faudrait que les élasticités-revenus entre les régions ne soient pas trop dissemblables, donc que la différence entre les revenus régionaux ne soit pas trop grande.

d'actualisation reflétant le fait que l'on accorde plus d'importance à la consommation la plus proche dans le temps.

b) Pour la région développée :

Deux possibilités s'offrent à nous :

α) La demande finale de cette région pour chaque période pourrait être fixée sur base du taux de croissance que cette région a connu dans le passé.

β) De toute façon, cette détermination peut être à nouveau du ressort de l'autorité publique et constituera une nouvelle variable exogène du système.

Cette demande finale sera une contrainte minimum à atteindre, alors que l'objectif du modèle consiste dans la maximation de la demande finale de la région défavorisée.

Toutefois, dans l'hypothèse α, il faudrait tenir compte, pour déterminer la demande finale, des élasticités propres à chaque bien. Nous pourrions alors choisir un accroissement de revenu identique à celui connu dans le passé et sur base de ce Y et des élasticités-revenu, nous obtiendrions les valeurs des diverses demandes finales.

Pour calculer ces élasticités-revenu régionales, nous devons connaître les revenus régionaux et les diverses demandes finales.

Nous avons déjà vu que les revenus régionaux nous étaient donnés par l'I.N.S. et que seule une enquête empirique (1) pouvait nous amener à la valeur des demandes régionales.

§ 3.- Les variables non connues directement

1) Les capacités productives de chaque région au début du plan

La variable se rapprochant le plus de ces capacités et dont

---

(1) Etudes statistiques et économétriques, nº 7, I.N.S.

nous possédons une connaissance chiffrée est l'output sectoriel régional (1).

Est-il possible, par quelques manipulations, d'obtenir une valeur assez proche de celle que nous recherchons?

a) Une première solution serait de tenir compte d'un pourcentage de sous-emploi de la capacité productive.

Nous pourrions supposer que ce pourcentage de sous-emploi du capital investi est égal au pourcentage du sous-emploi de la force de travail sectorielle existante conjoncturellement.

Augmentant la valeur de l'output de ce pourcentage d'inemploi, nous obtiendrions, espérons-nous, une valeur assez proche de la capacité productive.

Pour calculer ce pourcentage, il nous faudrait connaître, pour chaque activité régionale, le nombre de chômeurs et le nombre de personnes actives.

Dans le cadre de ce modèle, où nous supposons $\frac{K}{L}$ fixe, le pourcentage d'inemploi de la force de travail nous donnerait donc le pourcentage d'inemploi des ressources employées.

Pour arriver à la capacité productive, nous devrions donc faire l'hypothèse que le pourcentage d'inemploi des ressources est identique à celui de la capacité installée.

Une enquête rapide devrait nous permettre de vérifier cette hypothèse et nous amènerait peut-être à la conclusion que seule une enquête plus approfondie nous permettrait de prendre connaissance de la valeur des capacités productives.

L'Office national de l'emploi public, dans la série économique et sociale, une répartition par bureau régional et par groupe de professions, des chômeurs complets indemnisés. (2)

(1) Etudes statistiques et économétriques, nº 3.
(2) Et de même dans son bulletin mensuel, une répartition identique pour les chômeurs complets et les demandeurs d'emploi.

Les groupes de professions ne correspondent pas aux activités distinguées par l'I.N.S. mais devraient permettre de se faire une idée du chômage dans ce secteur.

Malheureusement, nous ne trouvons dans l'annuaire statistique qu'un classement des ouvriers actifs, par activité et par arrondissement administratif, et non un classement tenant compte de ces deux critères. Il nous faudra donc, soit nous livrer à une enquête empirique, soit nous contenter d'un pourcentage de sous-emploi par région ou par activité, ou d'une moyenne.

b) Une autre solution serait de partir d'une donnée de surchauffe économique, de plein-emploi, et d'augmenter alors la production de cette année, qui serait tenue pour égale à la capacité productive, au supplément de capacité dû à l'investissement nouveau, par exemple sur base du coefficient p_{ij} du modèle de Bernard (1), chaque p_{ij} représentant le surcroît de capacité que chaque unité d'investissement donne au secteur j de la région i.

c) Il ne faudrait cependant pas sous-estimer l'importance que peut avoir les publications des entreprises telles que bilan, rapport du conseil d'administration, et qui peuvent souvent mentionner les capacités de production.

Cela est surtout valable pour des activités où un nombre restreint d'entreprises sont présentes dans chaque région.

2) <u>Les matrices régionales de coefficients</u> de capacité de Leontief, c'est-à-dire nets et moyens.

Soit un coefficient de capital $b_{kj} = \frac{\text{capital de j}}{\text{output j}}$

Nous avons vu dans la section 1 que nous pouvons connaître cet output j, la valeur du capital employé par un secteur régional n'étant pas connue. Il nous faudra donc calculer ce capital, soit par une intégration dans le temps des investissements

---

(1) Cfr. Section 1 pour son calcul.

auxquels on associe une fonction de durée de vie, soit calculer un coefficient b_{kj} marginal (1) sur les différences premières du capital, c'est-à-dore les investissements nets, et de l'output j c'est-à-dire le surcroît d'output d'une année par rapport à l'autre.

Nous devrons donc soustraire à chaque investissement brut régional une proportion fixe d'amortissement égale à la proportion nationale.

3) Les matrices régionales de coefficients techniques

La matrice qui se rapproche le plus des différentes matrices régionales que nous recherchons est la matrice belge.

Comment pouvons-nous généraliser cette matrice nationale?

a) En premier lieu, il nous faut tenir compte de l'inexistence au niveau régional de certaines activités, nous pouvons ainsi annuler certaines lignes de la matrice nationale.

Les autres coefficients seront toujours identiques aux coefficients nationaux.

Pour obtenir les coefficients régionaux,nous devons tâcher de reconstruire la matrice des flux interindustriels.

b) De cette matrice régionale, nous connaissons la valeur de la somme de chaque ligne (2) et de chaque colonne (2).

c) Les colonnes correspondant aux industries établies principalement dans une région seront facilement remplies,puisque nous pouvons supposer que la structure régionale des inputs de cette activité est très proche de la structure nationale.

(1) En espérant qu'il soit identique au coefficient moyen.

(2) Etudes statistiques et économétriques, nº 3.

d) Pour les autres colonnes, il s'agit d'une recherche empirique, basée sur des enquêtes écrites ou orales, sur des études consacrées à des s ecteurs particuliers et sur les statistiques de la production industrielle.

e) Sur base des matrices interindustrielles constituées surtout sur base d'empirisme, nous pourrons calculer les matrices régionales des coefficients techniques.

f) Une autre méthode peut être envisagée, pour éviter de passer par la construction de matrices de flux interindustriels. Il s'agit de transformer la matrice des coefficients nationaux d'après les avis de personnes bien informées des faits technologiques.

Une fois cette matrice approchée calculée, l'on aurait recours à la méthode RAS (1) pour réaliser la complexe et fastidieuse tâche d'équilibrage des lignes et des colonnes, qui prend généralement tant de temps dans l'analyse input-output.

Section 3 : Un Modèle type Isard

§ 1.- Variables exogènes du modèle

Les variables dont la connaissance est indispensable pour la réalisation du modèle sont :

1) L'offre initiale de chaque région pour ses ressources mobiles ou immobiles : R_i^L

2) Le prix des produits finis.

---

(1) J. Paelinck et J. Waelbroeck, La procédure RAS de Cambridge: un essai d'application à l'étude des variations des coefficients du tableau industriel belge. In "Economie appliquée", nº 1, 1964. Department of applied economic, University of Cambridge. A program for growth, Vol. 3, Input-Output Relationship, 1954-1966.

3) Pour chaque région et chaque activité, le <u>revenu unitaire</u> C_j^L.

4) <u>Matrice des coefficients techniques</u>

§ 2.- <u>Aucune variable n'est directement accessible</u>. Nous devons conc envisager un calcul spécial pour chacune d'elles.

1) Offre initiale de chaque région pour des ressources mobiles

Le modèle Isard comprend donc à ce point de vue un nombre de variables inférieur à celui du modèle Del Punta.

Ce nombre restraint permettra donc une enquête à la fois plus approfondie et plus rapide.

2) Le prix des produits finis

Nous avons vu dans le premier chapitre que, lorsque nous n'imposions pas de contraintes de consommation, le dual ne nous fournissait que le prix des ressources et des produits intermédiaires.

Or, nous avons besoin des prix des biens finals pour calculer le profit unitaire de chaque activité. L'économiste, dans le choix de ces prix, sera influencé par deux éléments :

- le système de prix existant;
- les modifications qu'il faut y apporter afin d'obtenir la solution qu'il pense être optimale.

3) Le revenu unitaire C_j^L.

Ce revenu est, comme nous l'avons vu, égal à la valeur de la production de biens finals, lorsque l'activité fonctionne au niveau unitaire.

Il nous faudra donc encore déterminer les différentes matrices régionales de coefficients techniques pour arriver à calculer le revenu unitaire.

4) Les matrices régionales de coefficients techniques.

La constitution de ces matrices sera plus compliquée pour un modèle Isard que pour un modèle Del Punta.

En effet, dans le modèle de ce dernier, il nous "suffisait" de constituer pour chaque région une seule matrice.

La matrice générale $A = \begin{bmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix}$ ne comportait comme sous-matrices positives que celles se trouvant sur la diagonale principale. Au contraire, dans le modèle Isard, toutes les sous-matrices comporteront des éléments positifs. Nous devons donc distinguer les flux partant et provenant de chaque activité régionale, non seulement d'après l'activité vers laquelle ils se dirigent, mais également d'après la région où est localisée cette activité.

Seule donc, une enquête empirique pourra nous permettre de constituer les matrices recherchées (1).

Cette recherche empirique pourrait être menée sur base d'un modèle de Moses (2).

Il suppose pour chaque région une structure technique représentée par une matrice de coefficiente techniques et une structure commerciale représentée par une matrice T, chaque élément ${}_{jk}t_r$ de cette matrice indiquant la proportion des achats du bien r par la région k, effectués dans la région j.

---

(1) Citons, par exemple:
L. Derwa, Une nouvelle méthode d'analyse de la structure économique, in "Revue du Conseil économique wallon, nº28, 1957.
Techniques d'input-output et programmation linéaire, in "Revue du Conseil économique wallon, nº 34, 1958.
Ceruna, Centre de Recherches économiques et sociales, La Basse-Sambre - Essai de formulation d'un programme de développement sélectif.

(2) L. Moses, The Stability of interregional trading patterns and Input-Output Analysis.
Exposé aussi dans Stone Input-Output and national accounts, O.C.D.E.

Soit $A = \begin{bmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & - & & \\ & & & - & \\ 0 & & & & A_n \end{bmatrix}$ $\qquad T = \begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & - & & \\ & & - & \\ & & & T_n \end{bmatrix}$

La matrice T peut être transformée par orthogonalisation en une matrice T^*.

$$T^* = U\, T\, U^{-1}$$

Pour trois régions, cela donne

$$T^* = \begin{bmatrix} 11\,\hat{t} & 12\,\hat{t} & 13\,\hat{t} \\ 21\,\hat{t} & 22\,\hat{t} & 23\,\hat{t} \\ 31\,\hat{t} & 32\,\hat{t} & 33\,\hat{t} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sans commerce interrégional, le vecteur q de l'output serait exprimé comme $q = Aq + f$ (f = demandefinale).

Avec le commerce, nous obtiendrions :

$$\begin{aligned} q &= T^* (A\, q + f) \\ &= (I - T^* A)^{-1}\, T^* f. \end{aligned}$$

$T^* A$ étant la matrice que nous recherchons.

Section 4 : Un modèle type Stevens

§ 1.- Variables du modèle

Ce genre de modèle rend indispensable la connaissance des variables suivantes :

1) E_{re}^{L} = le maximum de ressources disponibles dans la région L.

2) Les matrices régionales de coefficients techniques.

3) Les contraintes de minimum de consommation.

4) Le prix-marché des produits finals.

§ 2.- Variables connues directement

1) Les contraintes de minimum de consommation.

Ces contraintes, comme nous l'avons écrit dans la section 3, sont le reflet d'une fonction de préférence (1).

Cette fonction nous donne le minimum de consommation que chaque région doit satisfaire pour assurer entre les régions une allocation de consommation qui offre un minimum de distorsion, d'"injustice" entre les régions.

2) Les prix du marché des produits finals.

Comme pour le modèle d'Isard, nous devons avoir un prix pour chaque produit final.

A la différence de ce dernier, qui choisissait les prix en fonction de ce que pourrait être la solution optimale, Stevens choisit, lui, les prix actuels du marché.

Si la recherche de ces prix ne cause pas trop de problèmes pour le modèle tel qu'il est exposé, c'est-à-dire un modèle où

---

(1) Celle du décideur politique, ou fonction de préférence collective.

chaque activité ne produit qu'un seul bien, il en va tout autrement dès que nous voulons rendre ce modèle opératoire.

Dans ce cas, nous devons nous contenter de secteurs beaucoup plus agrégés, c'est-à-dire comportant la production de biens multiples.

Il ne nous sera dès lors plus possible de mesure l'output en quantités physiques, il faudra le faire en valeur.

Nous ne pourrons plus garder alors la même fonction de préférence (produit d'un prix et d'une quantité physique). Celle-ci pourrait devenir le produit de la production en valeur par le prix de chaque production unitaire, c'est-à-dire l'unité.

§ 3.- Variables connues indirectement

1) La matrice des coefficients techniques

La matrice du modèle Stevens possède quelques caractéristiques qui lui sont propres. Il distingue un même bien suivant qu'il est ressource, bien intermédiaire ou bien final. Sa connaissance demande une recherche empirique.

2) E_{rc}^{L} = le maximum de ressources disponibles dans la région L.

Comme dans le modèle Isard, nous ne retenons comme contrainte de disponibilité que celle portant sur les ressources.

Ces ressources sont supposées immobiles entre régions mais peuvent, après avoir transité par une activité fantôme, faire l'objet d'un commerce interrégional.

CONCLUSIONS

Après avoir, dans le premier chapitre, esquissé une première synthèse de la programmation multirégionale et fait, dans le second, un premier pas vers le calcul d'une solution optimale, nous essaierons de voir, en conclusion, comment il faut envisager les modèles de programmation appliqués aux problèmes interrégionaux, et en particulier aux problèmes belges.

Il nous a semblé nécessaire de mettre préalablement en lumière les principales déficiences de ces modèles de programmation linéaire.

Section 1 : Déficiences des modèles de programmation linéaire

Nous pouvons, pensons-nous, distinguer deux sortes de déficiences, les unes tenant à la méthode employée pour obtenir la solution optimale, les autres tenant aux hypothèses particulières de chaque modèle (1).

§ 1.- Déficiences de la méthode

1) Les équations d'un modèle de programmation linéaire sont souvent des équations linéaires homogènes. Nous ne pouvons donc pas y introduire de phénomènes d'économie d'échelle qui tiennent une place si importante dans la vie de nombreux secteurs du monde économique, et spécialement en économie régionale.

La programmation en nombres entiers, ou programmation non-linéaire, ou linéaire par morceaux, pourrait nous permettre de remédier à cela.

2) Constance des coefficients techniques.

L'on pourrait, de prime abord, penser que ce défaut n'a

(1) Nous avons examiné ces dernières dans la seconde partie du premier chapitre.

d'importance que pour des modèles dynamiques, tel celui de Del Punta. En effet, dans ce dernier, au début de chaque période de planification, entrent en activité les investissements réalisés dans la période précédente. Ceci devrait normalement entraîner un changement dans les coefficients techniques (1). Or, nous ne tenons compte, pour exprimer les contraintes, que d'une seule série de coefficients, ceux existant au début de la période de planification. Ils ne peuvent qu'être de plus en plus inadaptés. Cela s'applique également, quoique de façon différente, aux problèmes statiques. Dans ce cas, en effet, les vastes secteurs caractérisant le modèle opératoire ont une production variée. La répartition de la capacité productive entre les divers produits peut donc être changée (2). D'autre part, de nouvelles techniques peuvent être ajoutées aux anciennes, ces deux faits devant entraîner une modification des coefficients.

D'autres déficiences peuvent encore être signalées. Ainsi, il nous faut constater qu'aussitôt que la solution optimale sera mise en oeuvre, elle sera inadaptée puisqu'elle aura donné naissance à d'autres coefficients et qu'avec ceux-ci, une nouvelle solution devra être recherchée.

Pour cela, il serait peut-être préférable de calculer des solutions en différences par rapport à un point de départ. Signalons enfin une déficience tenant, non à la constance des coefficients mais à leur emploi même. En effet, la répartition optimale des activités se fait en partie en fonction de ces coefficients qui sont supposés refléter la productivité, le revenu propre à chaque région.

Ces coefficients ne sont toutefois le reflet que d'une situation actuelle, ils ne peuvent tenir compte des changements de

---

(1) Surtout dans le cadre du Modèle Del Punta, où l'on suppose une région relativement sous-développée.
(2) Par exemple, sous l'influence de la demande.

productivité que pourrait apporter un changement dans la structure de la région (1).

3) Non-intégration du consommateur dans le modèle.

Si le producteur est introduit imparfaitement dans le modèle, le consommateur, lui, ne l'est que beaucoup plus imparfaitement encore, par l'intermédiaire - comme nous l'avons vu dans le premier chapitre - de contraintes de minimum de consommation.

Nous n'avons donc pas l'assurance que la solution offerte par la programmation linéaire soit une solution d'équilibre au sens walrassien, que le système de prix sous-jacent au modèle et donné par la solution dual soit compatible avec la condition d'équilibre d'égalité entre l'offre et la demande. Cela conduit Stevens [9] à proposer le remède suivant: pour avoir une solution d'équilibre, il faudrait calculer par une fonction de demande extrinsèque au modèle, la demande résultant des conditions de la solution optimale et voir si cette demande est égale à l'offre que nous donne cette même solution.

Par adaptation des prix fixés a priori et des contraintes de minimum de consommation, on pourrait arriver à une égalité entre l'offre et la demande. La solution idéale serait, bien sûr, d'introduire des fonctions de demande dans le modèle.

4) Absence de fonction d'investissement.

Soit explicitement (2), soit implicitement (3), les modèles que nous avons examinés prévoient une création d'investissement.

---

(1) Imaginons ainsi les changements apportés par Sidmar dans les coefficients régionaux: un programme calculé avant et après serait probablement assez dissemblable.

[9] STEVENS, cf. supra.

(2) Modèle Del Punta : Accroissement des capacités productives.

(3) Par le fonctionnement d'activités produisant des biens capitaux.

Le même problème que pour la création des biens de consommation va se poser. La quantité d'investissements donnée par la solution optimale correspond-elle à ce que l'on désire investir? D'autre part va se poser également le problème du financement de cet investissement. L'épargne réalisée, dans l'état du système économique correspondant à la solution optimale suffira-t-elle?

Ceci n'est pas un problème de programmation mais plutôt de politique économique. Il découle cependant de l'usage des modèles de programmation linéaire et se greffe dessus, puisque les modèles que l'on nous présente ne comportent pas de fonction d'épargne.

§ 2.- Utilisation d'un modèle

De ce qui précède, nous pouvons - semble-t-il - déduire qu'un modèle de programmation multirégionale ne peut être qu'un des éléments en fonction desquels une politique régionale peut être mise en oeuvre (1).

Il devra être accompagné d'un modèle général comprenant une fonction d'investissement, d'épargne et de consommation.

On ne peut, comme le fait Del Punta, prendre comme hypothèse que toutes les forces d'un pays sont mises au service de la réalisation de l'objectif. Il est des équilibres à respecter, des variables dont on doit tenir compte. D'autre part, nous pouvons affirmer que les modèles de programmation linéaire sont plus particulièrement adaptés à la résolution de problèmes simples telle la minimation des coûts de transports. Nous évitons alors les questions d'économies d'échelle et de la constance des coefficients mais nous ne tenons compte que d'une infime partie de la vie économique, les coûts de transport représentant souvent moins

(1) Ceci appartient au domaine de la politique économique et non de la programmation économique.

de 3 % du coût total de production.

Section 2 : Applicabilité à la Belgique

De ce que nous avons vu au chapitre II, il ne nous est pas difficile de conclure que le modèle demandant le moins de recherches empiriques est celui de Bernard. Ce modèle, outre l'avantage de pouvoir intégrer d'une certaine manière les économies d'échelle, pourrait assez facilement s'intégrer dans la programmation nationale.

En effet, un modèle de programmation nationale devrait, dans sa solution optimale, nous donner pour chaque période de planification la valeur de l'investissement qui serait réalisé dans l'économie. Ce volume d'investissement serait alors réparti entre les régions grâce au modèle de Bernard. Ce modèle devrait donner de meilleurs résultats que celui de Del Punta, celui-ci ne permettant aucune complémentarité entre régions, puisque la capacité productive de la région sous-développée doit, à la fin de la période de planification, lui permettre de satisfaire elle-même toute sa demande finale, au détriment, sans doute, du revenu national.

D'autre part, un modèle Del Punta, permettant des liaisons interrégionales à la fin du plan, pourrait nous amener à voir la demande finale objectif satisfaite en grande partie par des importations que cette région ne pourrait sans doute se permettre. Les modèles de type "Isard" et "Stevens" ont un objectif différent de celui de Bernard. Ils vont nous donner une répartition optimale des activités. Mais ils ne nous donneront aucune indication sur la politique à suivre avec les capacités productives régionales excédentaires. En ce sens, ils sont moins "politiques" que le modèle de Bernard.

D'un point de vue politique économique, le modèle "Bernard" devrait donc s'avérer beaucoup plus utile que les autres modèles examinés.

— § —

Bibliographie

REVUES

1. Cahiers de l'ISEA, Série L, Economie régionale, Paris.

[1] BERNARD Ph.J. - Un modèle de croissance régionale, nº 142, oct. 1963.

[2] - Intégration des plans régionaux et nationaux, nº 112, avril 1961.

[3] FAHRI L. - La programmation interrégionale de l'agriculture, nº 142, oct. 1963.

[4] LE PAS J. - La réorientation optimale des ressources dans les régions en sur-emploi, nº 142, oct. 1963.

[5] NOWICKI A. - La résolution mathématique des problèmes d'économie régionale en U.R.S.S., nº 133, janv. 1963.

[6] PAELINCK J. - Note sur l'allocation optimale des ressources entre les diverses régions d'un territoire, nº 142, oct. 1963.

2. Journal of regional Science

[7] HEADY E.O. et EGBERT A.C. - Programming models of interdependance among Agricultural Sectors and Spatial allocation of crop production, vol. 4, nº 2, 1962.

[8] ISARD W. - Interregional linear programming model, vol. 1, nº 1, 1958.

[9] STEVENS B.M. - An interregional linear programming model, vol. 1, nº 1, 1958.

[10] - Linear programming and location rent, vol. 3, nº 2, 1961.

[11] MILLER R.E. - Alternative optima, degeneracy and imputed Value in Linear Programming, vol. 5, nº 1, 1963.

3. Papers and proceeding of the R.S.A.

[12] DADAYAN - A model of interregional relationship in a single system optimum plan of the

economy, vol XIV, 1965.

/13/ HEADY E.O. - Programming models, vol. XIII, 1964.

/14/ HURTHER A.P. - Regional investment and interregional programming, vol. XIII, 1964.

/15/ VIETORISZ T. - Industrial Development planning Models with economics of scale and indevisibilities, vol. XII, 1964.

4. Divers

/16/ DEL PUNTA V. - Sur une application particulière de la P.L. au problème de la programmation régionale, Economie appliquée; ISEA, Programmation régionale et théorie économique, nº 2, Tome 14, nº 1, 1961, PUF.

/17/ PARINELLO S. - L'ottimizzazione della produzione e degli scambi in un sistema pluriregionale: un approcio dinamico, in Economia Internazionale, nov. 1965, p. 130.

OUVRAGES

/18/ BOS - Spatial dispersion of economic activity, Rotterdam Univ. Press, 1965

/19/ BOUDEVILLE J.R. - Les programmes économiques, "Que sais-je? nº 1073, P.U.F. (Ch. IV), 1963.

/20/ DERWA L. - Notes du cours de recherche opérationnelle appliquée à des problèmes économiques, F.N.D.P., Namur.

/21/ ISARD W. - Methods of Regional Analysis, ch. X, M.I.T., 1963.

/22/ FOX, SENGUPTA, THORBECKE - The theory of quantitative economic policy with application to economic growth and stabilisation, North Holland,

/23/ ISARD W. et CUMBERLAND J. - Planification économique régionale, ch.I, O.C.D.E., 1961.

/24/ GOSH A. - Efficiency in location and Interregional flows, North Holland Publishing, 1965.

/25/ FRIEDMANN et ALONSO W. - Regional development and planning, ch. 19, Ch. L. Leven, M.I.T.Press, 1964.

[26] HIRSCHMAN A.O. - Interregional and international Transmission of economic growth, ch. 32.

[27] PAELINCK J. - Cours d'analyse et de politique économique régionale et sectorielle, F.N.D.P., Namur.
